

Rainbow Vertex Connection Number pada Keluarga Graf Roda

Firman², Dafik^{1,2}, Ermita Rizki Albirri²

¹CGANT - University of Jember

²Departement of Mathematics Education - University of Jember
firmanaja442@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, ermitara@unej.ac.id

Abstract

The rainbow vertex connection was first introduced by Krivelevich and Yuster in 2009 which is an extension of the rainbow connection. Let graph $G = (V, E)$ is a connected graph. Rainbow vertex-connection is the assignment of color to the vertices of a graph G , if every vertex on graph G is connected by a path that has interior vertices with different colors. The minimum number of colors from the rainbow vertex coloring in graph G is called rainbow vertex connection number which is denoted $rvc(G)$. The result of the research are the rainbow vertex connection number of family wheel graphs.

Keywords : *Rainbow vertex connection, rainbow vertex connection number, keluarga graf roda*

1 Pendahuluan

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ merupakan himpunan titik (*vertex*) yang berhingga dan tidak kosong dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi (*edge*) mungkin kosong dari pasangan terurut $\{u, v\}$ dengan titik $u, v \in V(G)$. Secara matematis graf G dinotasikan dengan $G(V, E)$. Jadi, suatu graf dimungkinkan tidak memiliki sisi tetapi setidaknya harus memiliki minimal satu titik [8]. Banyaknya himpunan titik pada suatu graf disebut dengan kardinalitas titik, pada umumnya dinotasikan dengan $|V(G)|$. Sedangkan kardinalitas sisi atau banyaknya himpunan sisi pada suatu graf dinotasikan dengan $|E(G)|$ [7].

Suatu graf dapat dikelompokkan yang biasanya disebut dengan keluarga graf. Keluarga graf merupakan kumpulan dari graf-graf yang memiliki ciri yang sama. Keluarga graf roda merupakan graf-graf yang memiliki keterkaitan struktur dengan graf roda. Keluarga graf roda mempunyai suatu ciri khusus terdiri dari titik pusat yang beradjensi dengan semua titik yang terdapat di lingkarannya.

Rainbow connection pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 2008 [1]. Kemudian, pada tahun 2009 Krivelevich dan Yuster mengembangkan konsep *rainbow connection* menjadi dua jenis yaitu *rainbow edge-connection* dan *rainbow vertex-connection* [4]. *Rainbow edge-connection* merupakan pemberian warna pada sisi suatu graf G , jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda. Sedangkan *rainbow vertex-connection* merupakan pemberian warna pada titik suatu graf G , jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. *Rainbow connection number* dinotasikan dengan $rc(G)$, sedangkan *rainbow vertex connection number* dinotasikan dengan $rvc(G)$.

Berikut merupakan definisi-definisi dan teorema yang akan digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 1. Graf kincir angin belanda (Dutch windmill graph) dinotasikan dengan $D_n^{(m)}$ merupakan graf yang diperoleh dari m salinan graf lingkaran C_n dengan titik yang sama. Graf kincir angin belanda juga disebut dengan graf persahabatan untuk $n = 3$. Graf kincir angin belanda terdiri dari $(n - 1)m + 1$ titik dan mn sisi [3].

Definisi 2. Graf lemon dinotasikan Le_n dengan $n \geq 3$ merupakan graf yang dikonstruksi dari graf helm H_n dengan menghubungkan titik y_i dengan titik pusat dan menghubungkan titik y_i dengan titik y_{i+1} serta titik y_1 dengan titik y_n [5].

Definisi 3. Graf kincir angin belanda tertutup (Closed Dutch windmill graph) dinotasikan dengan $CD_n^{(m)}$ merupakan graf yang diperoleh dari dan graf kincir angin belanda $D_n^{(m)}$ dengan $n \geq 4$, $m \geq 3$ dan n adalah genap. Kemudian setiap titik salinan yang mempunyai jarak terjauh dengan titik pusat dihubungkan, sehingga membentuk graf lingkaran.

Definisi 4. Graf bunga matahari dinotasikan Sf_n diperoleh dari graf bunga menambahkan sebanyak n titik pendants yang terhubung dengan titik pusat. Jadi graf bunga matahari mempunyai kardinalitas titik $3n + 1$ dan kardinalitas sisi $5n$ [2].

Teorema 1. [4] Misalkan G adalah graf terhubung dengan $diam(G)$, maka $rvc(G) \geq diam(G) - 1$.

2 Hasil Penelitian

Pada penelitian ini menghasilkan empat teorema tentang *rainbow vertex connection number* pada keluarga graf roda yaitu sebagai berikut:

Teorema 2. *Rainbow vertex connection number* pada graf kincir angin belanda $D_n^{(m)}$ untuk $m \geq 3$ dan $n = 5$ adalah $rvc(D_5^{(m)}) = 4$.

Bukti. Misalkan $D_5^{(m)}$ adalah graf kincir angin belanda dengan himpunan titik $V(D_5^{(m)}) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq 2m\}$ dan himpunan sisi $E(D_5^{(m)}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2m, i = \text{ganjil}\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{A y_i; 1 \leq i \leq 2m\}$. Pertama, akan ditunjukkan batas bawah dari graf kincir angin belanda. Graf kincir angin belanda $D_5^{(m)}$ memiliki diameter yaitu $diam(D_5^{(m)}) = 4$. Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh $rvc(D_5^{(m)}) \geq diam(D_5^{(m)}) - 1 = 3$. Karena setiap titik y_i terhubung dengan titik pusat sehingga harus memiliki warna yang berbeda untuk $i = \text{ganjil}$ dan $i = \text{genap}$. Setiap lintasan dari $x_i - x_j$ pasti melewati titik pusat sehingga titik pusat memiliki warna yang berbeda. Berdasarkan kondisi ini, sehingga diperoleh $rvc(D_5^{(m)}) \geq 4$.

Kedua, akan ditunjukkan batas atas dari graf kincir angin belanda $rvc(D_5^{(m)}) \leq 4$. Fungsi pewarnaan pelangi titik pada graf kincir angin belanda $D_5^{(m)}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= 1; 1 \leq i \leq 2m \\
f(y_i) &= 2; 1 \leq i \leq 2m \text{ dan } i = \text{ganjil} \\
f(y_i) &= 3; 1 \leq i \leq 2m \text{ dan } i = \text{genap} \\
f(A) &= 4
\end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan fungsi pewarnaan pelangi titik tersebut diperoleh lintasan pelangi (*rainbow path*) dari $u - v$ dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Lintasan Pelangi Titik $u - v$ pada graf kincir angin belanda $D_5^{(m)}$

Kasus	u	v	Kondisi	<i>Rainbow Vertex Coloring</i> $u - v$
1	x_i	x_j	i dan $j = \text{ganjil}$	$x_i, x_{i+1}, y_i, A, y_j, x_{j+1}, x_j$
2	x_i	x_j	$i = \text{ganjil}, j = \text{genap}$	x_i, y_i, A, y_j, x_j
3	x_i	x_j	i dan $j = \text{genap}$	$x_i, x_{i-1}, y_i, A, y_j, x_{j-1}, x_j$
4	x_i	y_j	i dan $j = \text{ganjil}$	x_i, y_i, A, y_j
5	x_i	y_j	i dan $j = \text{genap}$	x_i, y_i, A, y_j
6	x_i	y_j	$i = \text{genap}, j = \text{ganjil}$	x_i, y_i, A, y_j
7	x_i	y_j	$i = \text{ganjil}, j = \text{genap}$	x_i, y_i, A, y_j
8	y_i	y_j		y_i, A, y_j

Berdasarkan Tabel 1 kita tahu bahwa setiap lintasan $u - v$ memiliki lintasan pelangi, atau dengan kata lain setiap lintasan pada graf kincir angin belanda $D_5^{(m)}$ memiliki warna yang berbeda pada setiap titik-titik interiornya. Karena setiap titik-titik interiornya memiliki warna yang berbeda, maka memenuhi konsep dari *rainbow vertex connection*. Sehingga berdasarkan batas bawah dan batas atas terbukti bahwa $rvc(D_5^{(m)}) = 4$.

Ilustrasi terkait *rainbow vertex connection* pada graf kincir angin belanda dapat dilihat pada Figure 1. Figure 1 merupakan contoh *rainbow vertex connection* pada graf kincir angin belanda $D_5^{(6)}$. Pada Figure 1 juga diperoleh *rainbow vertex connection number* yaitu $rvc(D_5^{(6)}) = 4$.

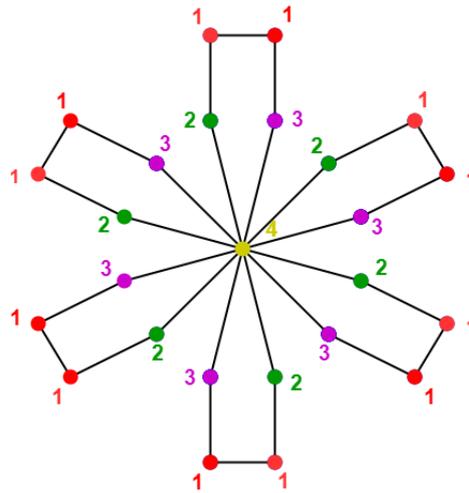


Figure 1: $rvc(D_5^{(6)}) = 4$

Teorema 3. *Rainbow vertex connection number pada graf lemon L_n untuk $n \geq 3$ adalah $rvc(L_n) = 1$.*

Bukti. Misalkan Le_n adalah graf lemon dengan himpunan titik $V(Le_n) = \{z\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Le_n) = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_1 y_n\}$. Pertama, akan ditunjukkan batas bawah dari graf lemon. Diameter dari graf lemon Le_n adalah $diam(Le_n) = 2$. Dalam graf lemon Le_n setiap titik bertetangga dengan titik pusat, sehingga setiap dua titik yang berbeda dari graf lemon Le_n dapat melewati titik pusat. Sehingga berdasarkan kondisi tersebut dan Teorema 1 diperoleh $rvc(Le_n) \geq 1$. Kedua, akan ditunjukkan batas atas dari graf lemon $rvc(Le_n) \leq 1$. Fungsi pewarnaan pelangi titik pada graf lemon Le_n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 1; 1 \leq i \leq n \\ f(y_i) &= 1; 1 \leq i \leq n \\ f(z) &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan fungsi pewarnaan pelangi titik tersebut diperoleh lintasan pelangi (*rainbow path*) dari $u - v$, dimana $u, v \in V(Le_n)$ dapat dilihat pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Lintasan Pelangi Titik $u - v$ pada graf lemon Le_n

Kasus	u	v	<i>Rainbow Vertex Coloring</i> $u - v$
1	x_i	x_j	x_i, z, x_j
2	x_i	y_j	x_i, z, y_j
3	y_i	y_j	y_i, z, y_j
4	y_i	x_j	y_i, z, x_j

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh untuk setiap dua titik yang berbeda pada graf lemon Le_n memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda, sehingga sesuai dengan definisi dari *rainbow vertex connection*. Jadi berdasarkan batas bawah dan batas atas dapat disimpulkan bahwa *rainbow vertex connection number* pada graf lemon Le_n adalah $rvc(Le_n) = 1$.

Ilustrasi terkait *rainbow vertex connection* pada graf lemon dapat dilihat pada Figure 2. Figure 2 merupakan contoh *rainbow vertex connection* pada graf lemon Le_8 . Pada Figure 2 juga diperoleh *rainbow vertex connection number* yaitu $rvc(Le_8) = 1$.

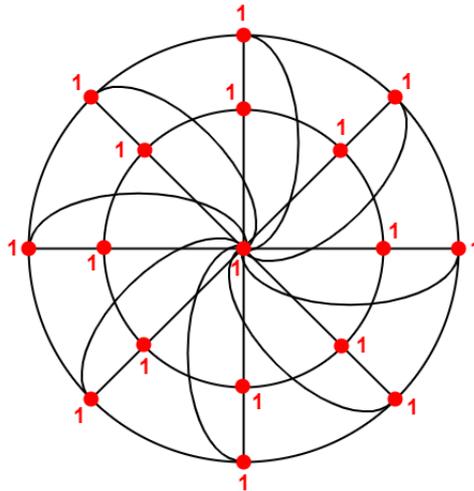


Figure 2: $rvc(Le_8) = 1$

Teorema 4. *Rainbow vertex connection number pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_n^{(m)}$ untuk $n = 4$ dan $m \geq 3$ adalah*

$$rvc(CD_4^{(m)}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } m = 3 \\ 2, & \text{untuk } m = 4, 5, 6 \\ 3, & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian *rainbow vertex connection number* pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$ dibagi menjadi tiga kasus sebagai berikut.

Kasus 1: untuk $m = 3$.

Misalkan $CD_4^{(m)}$ adalah graf kincir angin belanda tertutup dengan himpunan titik $V(CD_4^{(m)}) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(CD_4^{(m)}) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{Ay_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_i z_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{z_1 z_m\}$. Pertama, akan ditunjukkan batas bawah dari graf kincir angin belanda tertutup. Diameter pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$ untuk $m = 3$ adalah dua. Sehingga berdasarkan Teorema 1 diperoleh $rvc(CD_4^{(m)}) \geq 1$ untuk $m = 3$.

Kedua, akan ditunjukkan batas atas dari graf kincir angin belanda tertutup untuk $m = 3$ $rvc(CD_4^{(m)}) \leq 1$. Fungsi pewarnaan pelangi titik pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(3)}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 1; 1 \leq i \leq m \\ f(y_i) &= 1; 1 \leq i \leq m \\ f(z_i) &= 1; 1 \leq i \leq m \\ f(A) &= 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi pewarnaan pelangi titik di atas, diperoleh lintasan pelangi (*rainbow path*) $u - v$, dimana $u, v \in V(CD_4^{(3)})$ dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Lintasan Pelangi Titik $u - v$ pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(3)}$

Kasus	u	v	Kondisi	Rainbow Vertex Coloring $u - v$
1	x_i	x_j		x_i, A, x_j
2	x_i	y_j		x_i, A, y_j
3	y_i	y_j		y_i, A, y_j
4	z_i	x_{i+1}	$1 \leq i \leq m - 1$	z_i, z_{i+1}, x_{i+1}
5	z_i	x_m	$1 \leq i \leq m - 1$	z_i, z_m, x_m
6	z_m	x_i	$1 \leq i \leq m - 1$	z_m, z_i, x_i
7	z_i	y_{i+1}	$1 \leq i \leq m - 1$	z_i, z_{i+1}, y_{i+1}
8	z_i	y_m	$1 \leq i \leq m - 1$	z_i, z_m, y_m
9	z_m	x_i	$1 \leq i \leq m - 1$	z_m, z_i, y_i
10	x_1	z_i	$2 \leq i \leq m$	x_1, z_1, z_i
11	y_1	z_i	$2 \leq i \leq m$	y_1, z_1, z_i
12	A	z_i	$1 \leq i \leq m$	A, x_i, z_i

Berdasarkan Tabel 3 diperoleh bahwa untuk dua titik yang berbeda pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$ dengan $m = 3$ terdapat lintasan pelangi, atau setiap titik-titik interiornya memiliki warna yang berbeda. Sehingga berdasarkan batas bawah dan batas atas dapat disimpulkan *rainbow vertex connection number* graf kincir angin belanda tertutup

$CD_4^{(m)}$ dengan $m = 3$ adalah $rvc(CD_4^{(3)}) = 1$.

Kasus 2: untuk $m = 4, 5$ dan 6 .

Misalkan $CD_4^{(m)}$ adalah graf kincir angin belanda tertutup dengan himpunan titik $V(CD_4^{(m)}) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(CD_4^{(m)}) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{Ay_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_i z_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{z_1 z_m\}$. Pertama, akan ditunjukkan batas bawah dari graf kincir angin belanda tertutup. Diameter pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$ untuk $m = 4, 5$ dan 6 adalah tiga. Sehingga berdasarkan Teorema 1 diperoleh $rvc(CD_4^{(m)}) \geq 2$.

Kedua, akan ditunjukkan batas atas dari graf kincir angin belanda tertutup untuk $m = 4, 5$ dan 6 adalah $rvc(CD_4^{(m)}) \leq 2$. Sehingga fungsi pewarnaan pelangi titik pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$ sebagai berikut:

Untuk $m = 4$ dan 5

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 2; 1 \leq i \leq m \\ f(y_i) &= 2; 1 \leq i \leq m \\ f(z_i) &= 1; 1 \leq i \leq m \\ f(A) &= 1 \end{aligned}$$

Untuk $m = 6$

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 2; 1 \leq i \leq m \\ f(y_i) &= 2; 1 \leq i \leq m \\ f(z_i) &= 1; i \neq 2 \text{ dan } 6 \\ f(z_i) &= 2; i = 2 \text{ dan } 6 \\ f(A) &= 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi pewarnaan pelangi titik di atas, diperoleh lintasan pelangi (*rainbow path*) $u - v$, dimana $u, v \in V(CD_4^{(m)})$ dengan $m = 4$ dan 5 dapat dilihat pada Tabel 4. Sedangkan lintasan pelangi (*rainbow path*) $u - v$, dimana $u, v \in V(CD_4^{(m)})$ dengan $m = 6$ dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 4. Lintasan Pelangi Titik $u - v$ pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$

Kasus	u	v	Kondisi	<i>Rainbow Vertex Coloring</i> $u - v$
1	x_i	x_j		x_i, A, x_j
2	x_i	y_j		x_i, A, y_j
3	y_i	y_j		y_i, A, y_j
4	z_i	x_j		z_i, y_i, A, x_j
5	z_i	y_j		z_i, x_i, A, y_j
6	z_i	z_{i+2}	$1 \leq i \leq m - 2$	z_i, z_{i+1}, z_{i+2}
7	z_1	z_{m-1}	$m = 5$	z_1, z_m, z_{m-1}
8	z_2	z_m	$m = 5$	z_2, z_1, z_m
9	A	z_i	$1 \leq i \leq m$	A, x_i, z_i

Tabel 5. Lintasan Pelangi Titik $u - v$ pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(6)}$

Kasus	u	v	Kondisi	<i>Rainbow Vertex Coloring</i> $u - v$
1	x_i	x_j		x_i, A, x_j
2	x_i	y_j		x_i, A, y_j
3	y_i	y_j		y_i, A, y_j
4	z_i	x_j		z_i, y_i, A, x_j
5	z_i	y_j		z_i, x_i, A, y_j
6	z_i	z_{i+2}	$1 \leq i \leq m - 2$	z_i, z_{i+1}, z_{i+2}
7	z_1	z_{m-1}	$m = 6$	z_1, z_m, z_{m-1}
8	z_2	z_m	$m = 6$	z_2, z_1, z_m
9	z_2	z_{m-1}	$m = 6$	z_2, z_1, z_m, z_{m-1}
10	z_1	z_{m-2}	$m = 6$	$z_1, z_m, z_{m-1}, z_{m-2}$
11	z_3	z_m	$m = 6$	z_3, z_2, z_1, z_m
12	A	z_i	$1 \leq i \leq m$	A, x_i, z_i

Berdasarkan Tabel 4 dan Tabel 5 diperoleh bahwa untuk dua titik yang berbeda memiliki lintasan pelangi atau setiap titik interiornya memiliki warna yang berbeda. Sehingga hal tersebut sesuai dengan konsep dari *rainbow vertex connection*. Jadi berdasarkan batas bawah dan batas atas dapat disimpulkan bahwa $rvc(CD_4^{(m)}) = 2$ untuk $m = 4, 5$ dan 6 .

Kasus 3: untuk $m \geq 7$.

Misalkan $CD_4^{(m)}$ adalah graf kincir angin belanda tertutup dengan himpunan titik $V(CD_4^{(m)}) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(CD_4^{(m)}) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{Ay_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_i z_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{z_1 z_m\}$. Pertama, akan ditunjukkan batas bawah dari graf kincir angin belanda tertutup. Diameter graf kincir angin belanda tertutup adalah $diam(CD_4^{(m)}) = 3$ untuk $m = 7$ dan $diam(CD_4^{(m)}) = 4$ untuk $m \geq 8$. Menurut Li dan Liu (2011) $rvc(C_7) = 3$. Karena graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$ untuk $m = 7$ terdapat graf lingkaran dengan order 7. Sehingga berdasarkan kondisi ini dan Teorema 1 diperoleh $rvc(CD_4^{(m)}) \geq 3$.

Kedua, akan ditunjukkan batas atas dari graf kincir angin belanda tertutup untuk $m \geq 7$ adalah $rvc(CD_4^{(m)}) \leq 3$. Fungsi pewarnaan pelangi titik pada graf kincir angin belanda tertutup ($CD_4^{(m)}$) untuk $m \geq 7$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 2; 1 \leq i \leq m \\ f(y_i) &= 3; 1 \leq i \leq m \\ f(z_i) &= 1; 1 \leq i \leq m \\ f(A) &= 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi pewarnaan pelangi titik di atas, diperoleh lintasan pelangi (*rainbow path*) $u - v$, dimana $u, v \in V(CD_4^{(m)})$ dengan $m \geq 7$ dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Lintasan Pelangi Titik $u - v$ pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$, $m \geq 7$

Kasus	u	v	Kondisi	Rainbow Vertex Coloring $u - v$
1	x_i	x_j		x_i, A, x_j
2	x_i	y_j		x_i, A, y_j
3	y_i	y_j		y_i, A, y_j
4	z_i	x_j		z_i, y_i, A, x_j
5	z_i	y_j		z_i, x_i, A, y_j
6	z_i	z_j		z_i, x_i, A, y_j, z_j
7	A	z_i	$1 \leq i \leq m$	A, x_i, z_i

Berdasarkan Tabel 6 diperoleh bahwa graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$ dengan $m \geq 7$ sudah memenuhi konsep dari *rainbow vertex connection* yaitu untuk dua titik yang berbeda setiap titik-titik interiornya memiliki warna yang berbeda. Sehingga berdasarkan batas bawah dan batas atas terbukti bahwa $rvc(CD_4^{(m)}) = 3$ untuk $m \geq 7$.

Ilustrasi terkait *rainbow vertex connection* pada graf kincir angin belanda tertutup dapat dilihat pada Figure 3. Figure 3 merupakan contoh *rainbow vertex connection* pada graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(8)}$. Pada Figure 3 juga diperoleh *rainbow vertex connection number* yaitu $rvc(CD_4^{(8)}) = 3$.

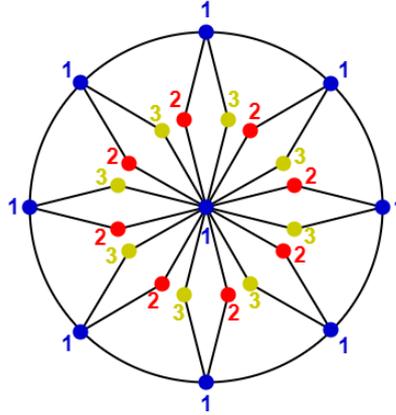


Figure 3: $rvc(CD_4^{(8)}) = 3$

Teorema 5. *Rainbow vertex connection number pada graf bunga matahari Sf_n untuk $n \geq 3$ adalah $rvc(Sf_n) = 1$.*

Bukti. Misalkan Sf_n adalah graf bunga matahari dengan himpunan titik $V(Sf_n) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Sf_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Ay_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Az_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\}$. Pertama, akan ditunjukkan batas bawah dari graf bunga matahari. Graf bunga matahari Sf_n memiliki diameter sama dengan dua, atau dapat dinotasikan dengan $diam(Sf_n) = 2$. Semua titik bertetangga dengan titik pusat pada graf bunga matahari (Sf_n), sehingga sesuai dengan Teorema 1 yaitu $rvc(Sf_n) \geq 1$.

Kedua, akan ditunjukkan batas atas dari graf bunga matahari $rvc(Sf_n) \leq 1$. Fungsi pewarnaan pelangi titik pada graf bunga matahari Sf_n sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= 1; 1 \leq i \leq n \\
f(y_i) &= 1; 1 \leq i \leq n \\
f(z_i) &= 1; 1 \leq i \leq n \\
f(A) &= 1
\end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan fungsi pewarnaan pelangi titik tersebut diperoleh lintasan pelangi dari $u - v$, dimana $u, v \in V(Sf_n)$ dapat dilihat pada Tabel 7 berikut.

Tabel 7. Lintasan Pelangi Titik $u - v$ pada graf bunga matahari Sf_n

Kasus	u	v	<i>Rainbow Vertex Coloring</i> $u - v$
1	x_i	x_j	x_i, A, x_j
2	x_i	y_j	x_i, A, y_j
3	x_i	z_j	x_i, A, z_j
4	y_i	y_j	y_i, A, y_j
5	y_i	z_j	y_i, A, z_j
6	z_i	z_j	z_i, A, z_j

Berdasarkan Tabel 7 diperoleh bahwa untuk dua titik yang berbeda dari graf bunga matahari Sf_n memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. Sehingga hal tersebut sesuai dengan konsep dari *rainbow vertex connection*. Sehingga berdasarkan batas bawah dan batas atas, terbukti bahwa $rvc(Sf_n) = 1$ untuk $n \geq 3$.

Ilustrasi terkait *rainbow vertex connection* pada graf bunga matahari dapat dilihat pada Figure 4. Figure 4 merupakan contoh *rainbow vertex connection* pada graf bunga matahari Sf_8 . Pada Figure 4 juga diperoleh *rainbow vertex connection number* yaitu $rvc(Sf_8) = 1$.

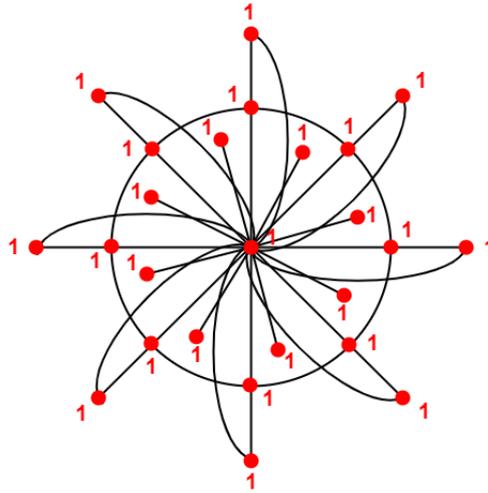


Figure 4: $rvc(Sf_8) = 1$

3 Kesimpulan

Pada penelitian ini, kita telah menemukan nilai yang tepat dari *rainbow vertex connection number* pada keluarga graf roda yaitu graf kincir angin belanda $D_5^{(m)}$, graf lemon Le_n , graf kincir angin belanda tertutup $CD_4^{(m)}$ dan graf bunga matahari Sf_n . Berdasarkan hasil penelitian di atas, dapat disimpulkan bahwa diperoleh sebanyak 4 teorema tentang *rainbow vertex connection number* pada keluarga graf roda.

4 Ucapan terima kasih

Kami mengucapkan terima kasih atas dukungan dari CGANT-Research Group Universitas Jember.

References

- [1] Chartrand, G., G. L. Johns., K. A. Mckeon., dan P. Zhang. 2008. Rainbow connection in graphs. *Math. Bohemica*. 133:85-98.
- [2] Javaid, M., M. K. Siddique, dan U. Ali. 2020. Novel Connection Based Zagreb Indices of Several Wheel-Related Graphs. *Comp. J. Combin. Math*. 2:31-58.
- [3] Kanna, M. R. R., R. P. Kumar., dan R. Jagadeesh. 2016. Computation of Topological Indices of Dutch Windmill Graph. *Journal of Discrete Mathematics*. 6:74-81.
- [4] Krivelevich, M. dan R. Yuster. 2009. The Rainbow Connection of Graph is (at most) Reciprocal to Its Minimum Degree. *IWOCA*. 5874:432-437.
- [5] Kumala, I. S. 2019. Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Bunga dan Graf Lemon. *Matematika dan Pendidikan Matematika*. 4(1):39-48.
- [6] Li, X. dan S. Liu. 2011. Rainbow vertex-connection number of 2-connected graphs. arXiv:1110.5770v1 [*math.CO*].
- [7] Nugroho, D. B. 2008. *Catatan Kuliah (2 SKS) MX 324 Pengantar Teori Graf*. Universitas Kristen Satya Wacana.
- [8] Slamini. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember:Universitas Jember.